



2020 | Μάιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

ΑΛΓΕΒΡΑ

Α' Γενικού Λυκείου

Δευτέρα 25 Μαΐου 2020 | Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Να αποδείξετε ότι εάν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ τότε το **άθροισμα** και το **γινόμενο** των ριζών δίνεται από τους τύπους: $S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$ και $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$

(Μονάδες 15)

- A2.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

- i. $d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- ii. $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- iii. Η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ έχει δύο ρίζες άνισες αν $\Delta < 0$.
- iv. Η εξίσωση $x^n = \alpha$, με $\alpha < 0$ και n άρτιο φυσικό αριθμό, είναι αδύνατη.
- v. Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^2 > \beta^2$.

(Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα εξής:

- $d(\alpha, 4) < 2$
- $|\beta - 3| < 1$

B1. Να δείξετε ότι $2 < \alpha < 6$ και $2 < \beta < 4$.

(Μονάδες 6)

B2. Να απλοποιήσετε την παράσταση: $A = |\alpha - 1| + 3|\beta - 5| - |2\alpha - \beta|$.

(Μονάδες 7)

B3. Αν $x = 2\alpha - 3$ και $y = \beta - 1$ να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

- $B = x + 2y - 5$
- $\Gamma = 3x - 2(x + y)$

(Μονάδες 7)

B4. Να υπολογίσετε την παρακάτω παράσταση:

$$\bullet \quad K = \frac{(x^3)^{-2} (y^3)^4}{x^3} \cdot \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^{-10}}{(y^3)^2 (x^3 y^2)^{-1}}.$$

(Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda + 1)x^2 - (\lambda - 1)x - \lambda = 0$, $\lambda \neq -1$ **(1)**

Γ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες για κάθε $\lambda \neq -1$.

(Μονάδες 8)

Γ2. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες αντίθετες.

(Μονάδες 7)

Γ3. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες: $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 = -2$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (4\lambda - 2)x + \lambda(3 - 8\lambda) = 0$ **(1)** με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα $\Delta = 4(4\lambda - 1)(3\lambda - 1)$.

(Μονάδες 7)

Δ2. Να βρείτε τις τιμές λ_1, λ_2 της παραμέτρου λ , με $\lambda_1 < \lambda_2$ ώστε η εξίσωση (1) να έχει μία διπλή ρίζα. Στη συνέχεια να βρείτε τη διπλή ρίζα x_0 για $\lambda = \lambda_1$.

(Μονάδες 8)

Δ3. Να προσδιορίσετε τις τιμές των $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο ρίζες

άνισες τις x_1, x_2 . Για ποιες από αυτές τις τιμές της παραμέτρου λ ισχύει:

$$4x_1x_2 = 3x_1 + 3x_2 - 26$$

(Μονάδες 10)



ΑΛΓΕΒΡΑ

Α' Γενικού Λυκείου

Δευτέρα 25 Μαΐου 2020 | Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 90.

A2. i. → Σωστό ii. → Λάθος iii. → Λάθος iv. → Σωστό v. → Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1.

$$d(\alpha, 4) < 2 \Leftrightarrow |\alpha - 4| < 2 \Leftrightarrow -2 < \alpha - 4 < 2 \Leftrightarrow 2 < \alpha < 6.$$

$$|\beta - 3| < 1 \Leftrightarrow -1 < \beta - 3 < 1 \Leftrightarrow 2 < \beta < 4.$$

B2. $A = |\alpha - 1| + 3|\beta - 5| - |2\alpha - \beta|$

$$2 < \alpha < 6 \Leftrightarrow 1 < \alpha - 1 < 5. \text{ Επομένως } |\alpha - 1| = \alpha - 1$$

$$2 < \beta < 4 \Leftrightarrow -3 < \beta - 5 < -1. \text{ Επομένως } |\beta - 5| = -(\beta - 5)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 < \alpha < 6 \Leftrightarrow 4 < 2\alpha < 12 \\ 2 < \beta < 4 \Leftrightarrow -2 > -\beta > -4 \Leftrightarrow -4 < -\beta < -2 \end{array} \right\} \oplus$$

$$0 < 2\alpha - \beta < 10. \text{ Επομένως } |2\alpha - \beta| = 2\alpha - \beta.$$

$$A = \alpha - 1 - 3(\beta - 5) - (2\alpha - \beta) = \alpha - 1 - 3\beta + 15 - 2\alpha + \beta$$

$$A = -\alpha - 2\beta + 14.$$



2020 | Μάιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

B3. $x = 2\alpha - 3$ $y = \beta - 1$.

$$B = 2\alpha - 3 + 2(\beta - 1) - 5 = 2\alpha - 3 + 2\beta - 2 - 5 \Leftrightarrow B = 2\alpha + 2\beta - 10.$$

$$\Gamma = 3(2\alpha - 3) - 2(2\alpha - 3 + \beta - 1) \Leftrightarrow \Gamma = 6\alpha - 9 - 4\alpha + 6 - 2\beta + 2 \Leftrightarrow \Gamma = 2\alpha - 2\beta - 1.$$

B4.

$$K = \frac{(x^3)^{-2} \cdot (y^3)^4}{x^3} \cdot \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^{-10}}{(y^3)^2 \cdot (x^3 y^2)^{-1}} \Leftrightarrow K = \frac{x^{-6} \cdot y^{12}}{x^3} \cdot \frac{x^{20}}{y^6 \cdot x^{-3} \cdot y^{-2}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow K = \frac{x^{-6} \cdot y^{12} \cdot x^{20}}{x^3 \cdot y^6 \cdot x^{-3} \cdot y^{-2}} \Leftrightarrow K = \frac{y^{12} \cdot x^{14}}{x^0 \cdot y^4} = x^{14} \cdot y^8.$$

ΘΕΜΑ Γ

$$(\lambda + 1)x^2 - (\lambda - 1)x - \lambda = 0, \lambda \neq -1, \quad (1)$$

Γ1.

$$\Delta = [-(\lambda - 1)]^2 - 4(\lambda + 1) \cdot (-\lambda) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta = (\lambda - 1)^2 + 4\lambda(\lambda + 1) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 4\lambda^2 + 4\lambda \Leftrightarrow \Delta = 5\lambda^2 + 2\lambda + 1.$$

Αρκεί να δείξω ότι $\Delta > 0$

$$\Delta_\lambda = 4 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = -16 < 0.$$

Επομένως το τριώνυμο $5\lambda^2 + 2\lambda + 1 > 0$ (ομόσημο του $\alpha = 5$).

Άρα $\Delta > 0$, έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

Γ2. Για να έχει η (1) δύο ρίζες αντίθετες πρέπει

$$5 = 0 \Leftrightarrow -\frac{\beta}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} = 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$



Γ3.

$$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 = -2 \Leftrightarrow x_1 x_2 (x_1 + x_2) = -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P \cdot S = -2 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) = -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\lambda}{\lambda+1} \cdot \frac{\lambda-1}{\lambda+1} = -2 \Leftrightarrow \frac{-\lambda(\lambda-1)}{(\lambda+1)^2} = -2 \Leftrightarrow$$

$$\stackrel{\lambda \neq -1}{\Leftrightarrow} -\lambda^2 + \lambda = -2\lambda^2 - 4\lambda - 2 \Leftrightarrow \lambda^2 + 5\lambda + 2 = 0.$$

$$\Delta = 17$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

ΘΕΜΑ Δ

$$x^2 - (4\lambda - 2)x + \lambda(3 - 8\lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\Delta 1. \quad \Delta = [-(4\lambda - 2)]^2 - 4\lambda(3 - 8\lambda) \Leftrightarrow \Delta = 16\lambda^2 - 16\lambda + 4 - 12\lambda + 32\lambda^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta = 48\lambda^2 - 28\lambda + 4 = 4 \cdot (12\lambda^2 - 7\lambda + 1) \quad (1)$$

$$\Delta_\lambda = 49 - 48 = 1$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{+7 \pm 1}{24} \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{3} \\ \lambda_2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$(1) \rightarrow \Delta = 4 \cdot 12 \left(\lambda - \frac{1}{3}\right) \left(\lambda - \frac{1}{4}\right) = 4 \cdot 4 \cdot 3 \left(\lambda - \frac{1}{3}\right) \left(\lambda - \frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta = 4(4\lambda - 1)(3\lambda - 1).$$

Δ2. Για να έχει διπλή ρίζα πρέπει $\Delta = 0$

$$\Leftrightarrow 4(4\lambda - 1)(3\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow 4\lambda - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad 3\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{4} \quad \text{ή} \quad \lambda = \frac{1}{3}.$$



2020 | Μάιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

Επειδή $\lambda_1 < \lambda_2$, επομένως: $\lambda_1 = \frac{1}{4}$. Για $\lambda_1 = \frac{1}{4}$. Η διπλή ρίζα

$$x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x_0 = -\frac{1}{2}.$$

Δ3. Για να έχει η (1) δύο ρίζες άνισες πρέπει $\Delta > 0 \Leftrightarrow 4(4\lambda - 1)(3\lambda - 1) > 0$.

	$-\infty$	$1/4$	$1/3$	$+\infty$
$4\lambda-1$	-	$\bigcirc$	+	+
$3\lambda-1$	-		$\bigcirc$	+
Δ	+	$\bigcirc$	$\bigcirc$	+

Επομένως, $\lambda \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

$$4x_1x_2 = 3x_1 + 3x_2 - 26$$

$$4P = 3S - 26 \Leftrightarrow 4\lambda(3 - 8\lambda) = 3(4\lambda - 2) - 26 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12\lambda - 32\lambda^2 = 12\lambda - 6 - 26 \Leftrightarrow 32\lambda^2 = 32 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = -1 \quad \text{ή} \quad \lambda = 1.$$

Δεκτές και οι δύο λύσεις εφόσον $\lambda \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$.